



**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
04/06/2025**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑ.Λ. (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΘΕΜΑ Α :

A₁ : Σχολικό βιβλίο σελίδα 93

A₂ : Σχολικό βιβλίο σελίδα 16

A₃ : α) Λάθος β) Σωστό γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β :

B1 : Έχουμε :

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v$$

$$v_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50$$

$$v_1 = 50 - 15 - 11 - 8 - 6$$

$$v_1 = 10$$

x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$\underline{x_i v_i}$
0	10	20%	10	0
1	15	30%	25	15
2	11	22%	36	22
3	8	16%	44	24
4	6	12%	50	24
Σύνολα	50	100%		85

B₂ Έχουμε

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{50} = \frac{85}{50} = 1,7$$

B₃ Η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων διότι $n=50$ (άρτιος) άρα :

$$\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

B₄ (α) Το πολύ 3 ώρες υπερωριακά εργάζεται το

$$20\% + 30\% + 22\% + 16\% = 88\%$$

(β) Σε κάθε παρατήρηση προσθέτουμε το 4 άρα $\psi_i = x_i + 4$

Επομένως για τη νέα μέση τιμή θα έχουμε :

$$\bar{\psi} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 = 5,7$$

ΘΕΜΑ Γ :

Γ₁ : Έχουμε :

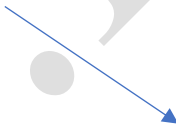
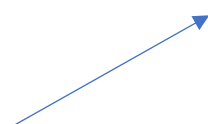
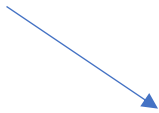
$$f(x) = -2x^3 + 6x^2 + a \quad \text{άρα} \quad f'(x) = -6x^2 + 12x$$

Έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -6x^2 + 12x &= 0 \quad \text{διαιρούμε με το } -6 \\ x^2 - 2x &= 0 \\ x(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{άρα } x=0 \text{ ή } x-2=0 \text{ δηλαδή } x=2$$

Συνεπώς έχουμε :

	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	-	+	-	
f				
		τ.ε.	τ.μ.	

Η f είναι : γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$

Γ₂ : Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0) = a$

και τοπικό μέγιστο στο $\chi=2$ το $f(2) = 8 + \alpha$

Έχουμε επίσης :

$$\frac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow f(0) + f(2) = -16 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + 8 + \alpha = -16 \Leftrightarrow 2\alpha = -16 - 8$$

$$2\alpha = -24 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = -12$$

Γ₃ : Για $\alpha = -12$, έχουμε :

$$f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12 \text{ άρα } f(1) = -2 + 6 - 12 = -8$$

$$f'(x) = -6x^2 + 12x \text{ άρα } f'(1) = -6 + 12 = 6$$

Έστω $\psi = \lambda\chi + \beta$ η ζητούμενη ευθεία. Ξέρουμε ότι $\lambda = f'(1) = 6$, άρα η ευθεία γίνεται $\psi = 6\chi + \beta$.

Γνωρίζουμε επίσης ότι το σημείο επαφής είναι το $(1, -8)$, άρα θέτουμε όπου χ το 1 και όπου ψ το -8 και έχουμε : $-8 = 6 \cdot 1 + \beta$ άρα $\beta = -14$

Τελικά , η ζητούμενη ευθεία είναι η $\psi = 6\chi - 14$

Γ₄ : Δείξαμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$ επομένως για

$$x \geq 2 \text{ έχουμε } f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 12$$

$$-2x^3 + 6x^2 \leq -16 + 24 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 \leq 8 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0$$

$$\text{άρα } 2x^3 - 6x^2 + 8 \geq 0 \text{ επομένως τελικά } x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$$

ΘΕΜΑ Δ :

Δ_1 : Έχουμε $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}$ επομένως $f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7$

Πρέπει $f'(1) = 0$ άρα

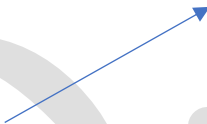
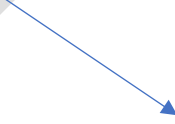
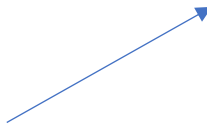
$$1^2 + 2\lambda \cdot 1 + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

Δ_2 : Για $\lambda = -4$, έχουμε ότι $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}$ και

$$f'(x) = x^2 - 8x + 7.$$

Θέτουμε $f'(x) = 0$ κι έχουμε : $x^2 - 8x + 7 = 0$ που έχει διακρίνουσα $\Delta = 36$

και ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = 7$. Επομένως έχουμε :

	-00	1	7	+00
f'	+	-	+	
f				
		τ. μ.	τ.ε.	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα υποδιαστήματα $(-00, 1]$ και $[7, +00)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 7]$

Δ_3 : Είναι $2020 < 2025$ και είναι και οι δύο μεγαλύτεροι του 7 , άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2020, 2025]$ επομένως $f(2020) < f(2025)$ άρα

$$f(2025) - f(2020) > 0 \quad (1)$$

Επίσης είναι : $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$ και είναι και οι δύο ανάμεσα στο 1 και το 7 , επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ άρα $f(\frac{3}{2}) > f(\frac{5}{2})$ άρα

$$f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $A > 0$ ως πηλίκο θετικών αριθμών.

Δ4 : Έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - (2x - 6) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 6 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{3})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(\cancel{x-2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{\cancel{x-2}} = \\ &= (2-8)(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = -12\sqrt{3} \end{aligned}$$